Esercizio 1

Data la base in $\mathbb{R}^2$, $B_1 = \{\underline{u}_1 = [1\ 2]^T;\ \underline{u}_2 = [-3\ 0]^T\}$:

a) Mostrare che B_1 costituisce una base di $\mathbb{R}^2$;

b) Calcolarne una base duale $B_2 = \{\underline{v}_1;\ \underline{v}_2\}$ e verificare che qualsiasi vettore $\underline{x}$ in $\mathbb{R}^2$ si può esprimere sia nella base B_1 che nella base B_2 coinvolgendo i vettori della base duale;

c) Ortogonalizzare la base B_1 mediante il procedimento di Gram-Schmidt ottenendo $B_3 = \{\underline{w}_1,\ \underline{w}_2\}$ ed esprimere un qualsiasi vettore $\underline{x}$ in $\mathbb{R}^2$ in tale base.

Esercizio 2

Ripetere i passi dell'esercizio precedente per il sotto-spazio vettoriale dei segnali di $L^2(\mathbb{R})$, spazio vettoriale dei segnali ad energia finita, $V = \text{span}\left\{u_1(t) = \text{tri}\left(\frac{t}{2}\right);\ u_2(t) = \text{rect}\left(t + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}\text{rect}\left(t - \frac{1}{2}\right)\right\}$ (dove si parla di "$\underline{x}$ in $\mathbb{R}^2$", chiaramente qui si intende "$\underline{x}$ in V").

Esercizio 3

Approssimare al meglio secondo il criterio dei minimi quadrati il segnale $y(t) = \text{rect}\left(\frac{t}{2}\right) \cdot (1 + \sin(2\pi t))$, rappresentandolo nelle diverse basi elaborate al punto precedente. Calcolare in ciascun caso la norma euclidea dell'errore di approssimazione e a seguire il rapporto segnale-rumore, esprimendolo sia in scala lineare (ξ) che in scala logaritmica (ξ_{dB}).

Esercizio 4 *[Facoltativo]*

Estendere il risultato dello sviluppo in serie di funzioni per segnali a banda limitata in $[f_1,\ f_2]$ seguendo rigorosamente lo stesso procedimento proposto a lezione, con inversione della trasformata di Fourier da $[f_1,\ f_2]$ a $[F_1,\ F_2]$ con $F_1 \leq f_1$ e $F_2 \geq f_2$. Interpretare il senso di tale sviluppo in serie relativamente allo spazio vettoriale dei segnali a banda limitata in $[f_1,\ f_2]$.