

Compito 16: Variabili casuali condizionali
Pdf condizionali/Momenti condizionali
Teoria dei Segnali

Esercizio 1

Si consideri una variabile casuale X con pdf $f_X(\alpha)$ di forma triangolare simmetrica nell'intervallo $[0,2]$ con probabilità complessiva $1/3$; al di fuori dell'intervallo $[0,2]$, X ammette valore -1 con la rimanente probabilità.

- a) Disegnare le pdf $f_X(\alpha)$, $f_{X|\{X=-1\}}(\alpha|\{X=-1\})$ e $f_{X|\{|X|\geq 1\}}(\alpha|\{|X|\geq 1\})$;
- b) Calcolare la probabilità $P(\text{sgn}(X) = 1|\{|X|\geq 1\})$ sfruttando il teorema della probabilità totale.
- c) Calcolare le medie $E[X]$, $E[X|X\geq 1]$.
- d) Calcolare le varianze σ_X^2 , $\sigma_{X|X\geq 1}^2$; verificare che quest'ultima è diversa da $E[(X - E[X])^2|X\geq 1]$.

Esercizio 2

Date 2 variabili casuali X e Y con pdf congiunta $f_{XY}(\alpha, \beta) = K\alpha^2$ interno ad un dominio di forma circolare di raggio 1, centrato nell'origine.

- a) Determinare il valore di K affinché $f_{XY}(\alpha, \beta)$ sia effettivamente una funzione di densità di probabilità congiunta;
- b) Calcolare le funzioni di densità di probabilità condizionali $f_{X|Y}(\alpha|\beta)$ e $f_{Y|X}(\beta|\alpha)$.
- c) Calcolare i valori attesi condizionali $E[Y|\{X=1/3\} \cup \{X=2/3\}]$ e $E[Y|X-Y\geq 0]$.

[Suggerimento: effettuare il calcolo integrale previa trasformazione del sistema di coordinate da cartesiani in sistema di coordinate polari: $d\alpha d\beta = r dr d\theta$]