Esercizio 1

a) Mostrare che la funzione $f(t) = e^{-\frac{t^2}{\sigma_1}} - e^{-\frac{t^2}{\sigma_2}}$ é una funzione a decrescenza rapida.

b) Mostrare che la funzione $g(t) = \arctan(t)$ é una funzione a crescita lenta.

c) Dimostrare utilizzando lo spazio delle funzioni a decrescenza rapida che la successione di funzioni così definita: $\{h_n(t) = n \cdot \mathrm{rect}\,(nt)\,,\ n \in \mathbb{N}\}$ converge alla distribuzione singolare $\delta(t)$.

Esercizio 2

a) Graficare la distribuzione $x_1(t) = e^{1-t} \cdot \varepsilon(t) \cdot \delta(t-1)$.

b) Graficare la distribuzione $x_2(t) = e^{1-t} \cdot \varepsilon(t) \cdot \delta'(t-1)$.

c) Graficare la distribuzione $x_3(t) = e^{1-t} \cdot \varepsilon(t) \cdot \delta\left(\frac{t}{2} - 1\right)$.

d) Graficare la distribuzione $x_4(t) = \sin\left(\frac{\pi}{2}t\right) \cdot \delta_1(t)$.

Esercizio 3

a) Mostrare il seguente risultato di convoluzione: $\delta(t-t_1) \star \delta(t-t_2) = \delta(t-t_1-t_2)$.

b) Mostrare il seguente risultato di convoluzione: $\delta^{(m)}(t-t_1) \star \delta^{(n)}(t-t_2) = \delta^{(m+n)}(t-t_1-t_2)$.