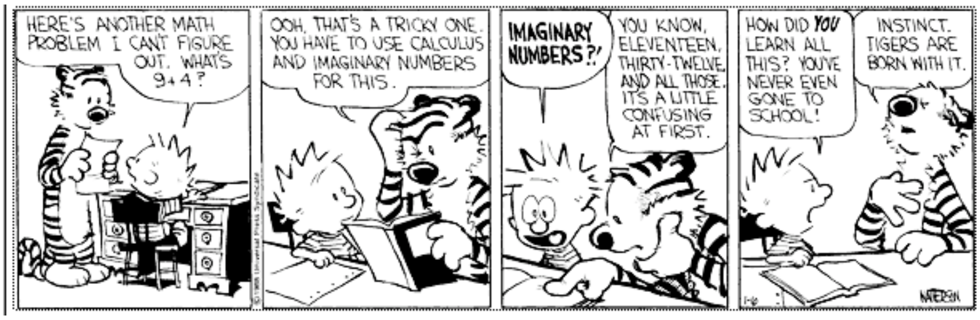
Numeri Complessi

S. Benini, M. Dalai
Corso di Comunicazioni Elettriche A, A.A. 2010-11
Università degli Studi di Brescia



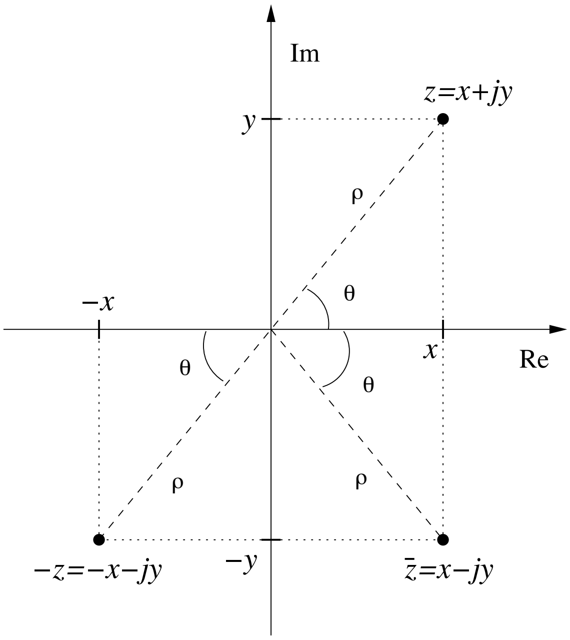


Figure 1: Rappresenzazione dei numeri complessi z, $\bar{z}$ e $-z$.

Formula di Eulero.
La più importante relazione da ricordare, da cui discende tutto il resto, è che per $\theta \in \mathbb{R}$ si ha

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta \tag{1}$$

Un numero z ammette quindi due rappresentazioni, $z = x + jy$ e $z = \rho\exp(j\theta)$, dove

$$\left\{ \begin{array}{l} x = \rho\cos\theta \\ y = \rho\sin\theta \end{array} \right. \qquad \text{e} \qquad \left\{ \begin{array}{l} \rho = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \left\{ \begin{array}{l} \arctan(y/x) \text{ se } x > 0 \\ \arctan(y/x) + \pi \text{ se } x < 0 \end{array} \right. \end{array} \right. \tag{2}$$

Posto $z = x + jy = \rho e^{j\theta}$ si ha

$$\bar{z} = x - jy = \rho e^{-j\theta} \tag{3}$$

$$|z|^2 = z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2 = \rho^2 \tag{4}$$

$$\frac{1}{z} = \left(\rho e^{j\theta}\right)^{-1} = \rho^{-1}e^{-j\theta} = \frac{\bar{z}}{|z|^2} = \frac{x - jy}{x^2 + y^2} = \frac{x}{x^2 + y^2} - j\frac{y}{x^2 + y^2} \tag{5}$$

$$z^n = \left(\rho e^{j\theta}\right)^n = \rho^n e^{jn\theta} = \rho^n \cos n\theta + j\rho^n \sin n\theta \tag{6}$$

Inoltre, per la somma e il prodotto tra due numeri complessi, valgono le usuali regole algebriche.

Funzioni Goniometriche

Formule di addizione:

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \tag{7}$$
$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \tag{8}$$

Ponendo $\beta = -\alpha$ in (8) si ottiene la nota uguaglianza $\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$.

Usando le (7)-(8) si ricavano facilmente

$$\sin(\pi-\alpha) = \sin\alpha \tag{9}$$
$$\cos(\pi-\alpha) = -\cos\alpha \tag{10}$$
$$\sin(\pi/2-\alpha) = \cos\alpha \tag{11}$$
$$\cos(\pi/2-\alpha) = \sin\alpha \tag{12}$$

e le **formule di duplicazione:**

$$\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha \tag{13}$$
$$\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \tag{14}$$
$$= 2\cos^2\alpha - 1 \tag{15}$$
$$= 1 - 2\sin^2\alpha \tag{16}$$

Le (15)-(16) forniscono le utili relazioni

$$\sin^2(\alpha) = \frac{1-\cos 2\alpha}{2} \qquad \cos^2(\alpha) = \frac{1+\cos 2\alpha}{2} \tag{17}$$

Usando i valori β e $-\beta$ in (7) e (8) si ottiene rispettivamente

$$\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) = 2\sin\alpha\cos\beta \tag{18}$$
$$\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\cos\beta \tag{19}$$

e, posto $\gamma = \alpha+\beta$ e $\theta = \alpha-\beta$
si ottengono le **formule di prostaferesi:**

$$\sin(\gamma) + \sin(\theta) = 2\sin\left(\frac{\gamma+\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\gamma-\theta}{2}\right) \tag{20}$$
$$\cos(\gamma) + \cos(\theta) = 2\cos\left(\frac{\gamma+\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\gamma-\theta}{2}\right) \tag{21}$$
$$\tag{22}$$

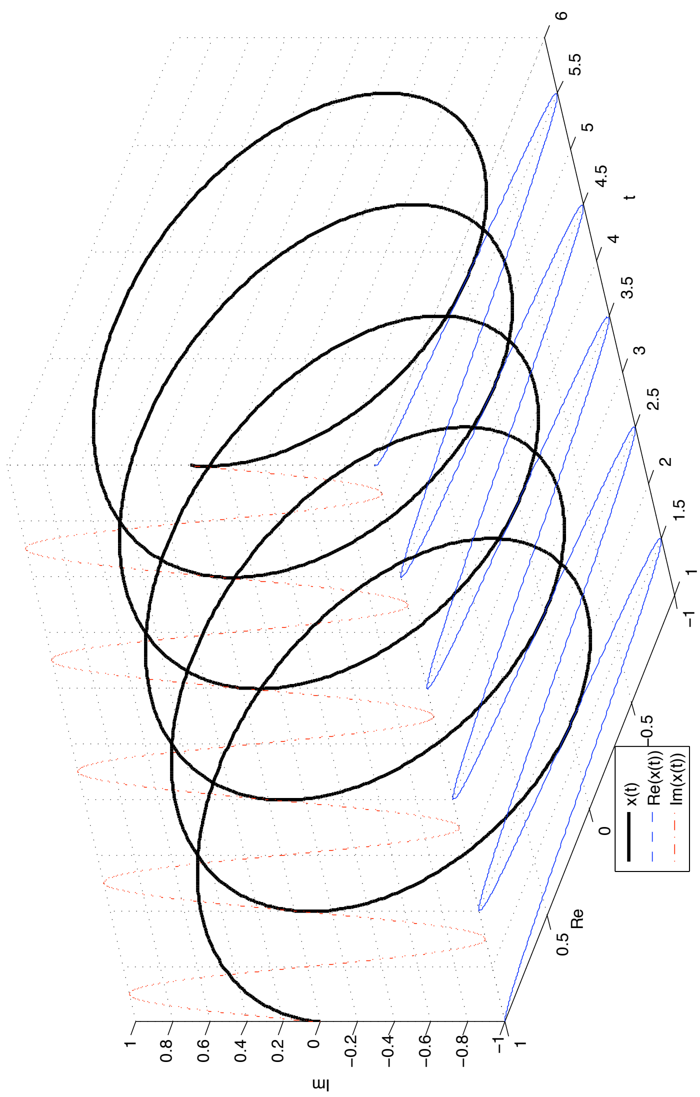


Figure 2: Esponenziale complesso $x(t) = e^{j2\pi f_0 t}$